# Szacowanie niepewności w pomiarach laboratoryjnych

## 1 Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z metodami obliczania niepewności wielkości mierzonych i wyliczanych w laboratorium fizycznym.

## 2 Wprowadzenie

Niniejsze ćwiczenie przewidziano jako ćwiczenie wstępne, zapoznające z szacowaniem niepewności w pomiarach laboratoryjnych. Jest ono realizowane przez każdego studenta poza pracownią, jako praca domowa, której zakres ustala prowadzący. Istotne zmiany nomenklatury i pojęć w technice opracowania wyników pomiaru, wprowadzane od lat dziewięćdziesiątych w świecie, a obecnie również w Polsce, zmusiły do poprzedzenia części praktycznej wprowadzeniem ułatwiającym realizację tego ćwiczenia. Dodajmy jednak, że rzetelne przygotowanie się do „szacunku niepewności" w pomiarach laboratoryjnych wymaga w zasadzie przyswojenia sobie podstawowych wiadomości ze statystyki. Oprócz wielu podręczników, pomocą w tym może służyć „Wirtualne Vademecum Statystyki" znajdujące się w materiałach dydaktycznych na stronie Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH (pozycja [5] w spisie literatury).

### Pomiar i zapis wyniku pomiaru

Pomiar. Aby cokolwiek zmierzyć, musimy znać definicję mierzonej wielkości (np. co to jest długość?) oraz jej jednostkę (np. metr), musimy dysponować sprawnym przyrządem pomiarowym (np. liniałem czy taśmą metalową, suwmiarką, śrubą mikrometryczną) wyskalowanym według wzorca. Porównując wielkość mierzoną (np. długość stołu) z jednostkową długością (np. 1 mm na przymiarze metalowym) – uzyskamy wynik pomiaru, to jest liczbę wraz z jednostką (np. 1522 mm). Podobna jest procedura pomiaru wielkości fizycznych wyznaczanych metodami pośrednimi, na przykład pomiar temperatury za pomocą termometru spirytusowego z wykorzystaniem zjawiska rozszerzalności objętościowej cieczy.

Wynik pomiaru i jego zapis. Liczba otrzymana w wyniku procedury pomiarowej wraz z jednostką, np. przytoczony powyżej rezultat pomiaru długości stołu 1522 mm, nie jest pełną informacją o mierzonej wielkości. Potrzebna jest również ocena wiarygodności uzyskanego rezultatu polegająca na oszacowaniu tzw. **niepewności** wyniku. Rozróżniamy dwie metody obliczeń niepewności pomiaru: metodę typu A (stosowaną dla serii pomiarów) lub metodę typu B (np. dla pojedynczego pomiaru niepewność szacowana jest z niepewności wzorcowania przyrządu lub w oparciu o tzw. działkę elementarną stosowanego miernika). Najczęściej wykorzystuje się pojęcie **niepewności standardowej** ($u$). Przyjęto umowę, że wynikiem pomiaru jest uzyskany liczbowy rezultat pomiaru wraz z wartością liczbową oszacowanej niepewności standardowej – obie liczby reprezentują pewne wielkości, wyrażone **przy użyciu tej samej jednostki!** Niepewność standardową zaokrągla się do maksymalnie dwóch cyfr znaczących, a wynik pomiaru zaokrągla się i podaje z miejscami znaczącymi zgodnymi co do pozycji z niepewnością. Na przykład, zapisujemy wynik: 1522 z niepewnością 1, ale nie 1522 z niepewnością 0,9. Albo 1,00061 ($u = 0,00027$), czy zaokrąglony 1,0006 ($u = 0,0003$), ale nie 1,0006 ($u = 0,00027$). Karygodnym jest podawanie wszystkich cyfr wynikających z obliczeń numerycznych przy użyciu kalkulatora, np.: 1522,79346214 ($u = 1,35791622$).

Nazewnictwo. W języku potocznym, a także w wielu dotychczasowych opracowaniach naukowych i technicznych stosuje się pojęcie błędu i uściślenia tego pojęcia przydatne do opisu efektów spowodowanych różnymi przyczynami (źródłami) różnic wyniku pomiaru wielkości mierzonej i jej wartości prawdziwej. Przez **błąd** rozumie się różnicę wyniku pomiaru i wartości prawdziwej, zazwyczaj nieznanej.

### Ocena niepewności typu B (pomiar jednokrotny)

Dość często w życiu codziennym, w technice i nauce uznajemy za wystarczające jednokrotne wykonanie pomiaru. W zależności od potrzeby dobieramy wówczas przyrząd pomiarowy odpowiedniej jakości (dokładności). Na przykład, w pomiarach długości czy grubości jest to liniał metalowy z najmniejszą działką pomiarową 1 mm albo suwmiarka (z działką 0,1 mm lub 0,005 mm) czy też śruba mikrometryczna z działką 0,01 mm. Do każdego przyrządu pomiarowego powinna być dostarczona informacja producenta o dokładności z jaką mierzy dany przyrząd (często sprowadza się ona do podania tzw. błędu maksymalnego – maksymalnej różnicy między wynikiem poprawnego odczytu ze skali przyrządu a wartością prawdziwą). W przypadku braku takiej informacji przyjmuje się, że dokładność, z jaką mierzy dany przyrząd jest równa wartości działki elementarnej (np. 0,01 mm dla śruby mikrometrycznej, czy też 1 mm dla przymiaru metrowego). Zdarzają się jednak przypadki, że na przyrządzie zaznaczone są drobniejsze działki, niż to wynika z jego rzeczywistej dokładności (np. działki jednomilimetrowe na kilkunastometrowej taśmie mierniczej powszechnego użytku). Wtedy to należy kierować się własnym doświadczeniem i przyjąć rozsądną wartość dokładności z jaką mierzy dany przyrząd, równą wielokrotności działki elementarnej (np. 1 cm dla wspomnianej wyżej taśmy mierniczej, o ile mierzona długość przekracza kilka metrów). Podobnie, wykorzystując przyrząd analogowy, np. woltomierz wychyłowy magnetoelektryczny, możemy oszacować dokładność wyniku pomiaru na podstawie tzw. klasy przyrządu. Klasa przyrządu to liczba, która określa jaki procent używanego w pomiarze zakresu przyrządu może być utożsamiany z dokładnością pomiarową, a dokładnie – błędem maksymalnym. I tak, pomiar napięcia 12,5 V przy zakresie 30 V, przyrządem klasy "1", wykonany jest z dokładnością wynoszącą 1% z 30 V = 0,3 V. Oszacowanie niepewności pomiaru jednokrotnego metodą typu B, $u_B$, dokonujemy w oparciu o analizę a priori (przed pomiarem) wszystkich znanych źródeł niepewności, w szczególności o informacje o danym typie przyrządu i metodzie pomiaru. Korzystamy tu z danych producenta przyrządu oraz analizujemy warunki, w jakich pomiar został wykonany. Oznaczmy dokładność pomiaru przez $\Delta$ – jest to zwykle najmniejsza działka używanego przyrządu (ew. błąd maksymalny). Przyjmujemy zazwyczaj, że z równym prawdopodobieństwem nieco różne wartości mierzonej wielkości mogą się zawierać w przedziale $(\mu \pm \Delta)$, gdzie przez $\mu$ oznaczamy tzw. **wartość oczekiwaną** zmiennej losowej, którą reprezentuje mierzona wielkość. Wartość oczekiwana może być utożsamiana ze wspomnianą wcześniej „prawdziwą" wartością mierzonej wielkości (np. uzyskaną — z bardzo dobrym przybliżeniem -– w pomiarach o wyjątkowo wysokim stopniu dokładności). Z rozważań statystycznych tego postulowanego tzw. równomiernego rozkładu zmiennej losowej wynika, że **niepewność standardowa typu B**, $u_B$, pomiaru tym przyrządem wyraża się wzorem

$$u_B = \Delta/\sqrt{3} \approx 0.58\Delta. \tag{1}$$

*Przykład 1.*
Zmierzono suwmiarką grubość płyty stalowej i odczytano wynik 24,8 mm. Zapiszemy wynik pomiaru: 24,8 mm ($\Delta = 0,1$mm) zaznaczając, że na podstawie informacji o przyrządzie przyjęliśmy wartość działki elementarnej równą 0,1 mm. Pomiarowi temu przypiszemy niepewność standardową, $u$, równą 0,06 mm [wzór(1)], zaznaczając, że uwzględniliśmy tylko informacje o jakości przyrządu (suwmiarki).

### Ocena niepewności typu A (pomiar wielokrotny)

Jeżeli oceniamy, że zmienne warunki pomiaru lub zmiany mierzonego obiektu mogą powodować nieco różne wyniki pomiaru, często decydujemy się na wielokrotne powtarzanie pomiaru. Na przykład, wyniki pomiaru średnicy dość długiego, metalowego drutu o przekroju kołowym, wykonywane śrubą mikrometryczną w różnych miejscach drutu mogą znacząco się różnić. Oznaczmy kolejne wyniki $n$-krotnie powtórzonego pomiaru przez $x_i$, gdzie indeks $i$ oznacza numer pomiaru ($i = 1, ..., n$). Wówczas średnia arytmetyczna $\bar{x}$ z wyników pomiarów jest dobrym oszacowaniem (w statystyce używamy terminu: estymatorem) wartości oczekiwanej $\mu$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu. \tag{2}$$

(Z powyższego wzoru wynika, że dla liczby pomiarów rosnącej nieograniczenie średnia arytmetyczna staje się **dokładnie** wartością oczekiwaną).
Niepewność standardową typu A, $u_A$, mierzonej wielkości $x$ utożsamiamy w tym przypadku z odchyleniem standardowym średniej $S(\bar{x})$; i tak **niepewność standardowa** $u_A$ opisana jest wzorem:

$$u_A = u(x) = S(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \tag{3}$$

Określając niepewność standardową obowiązani jesteśmy do wyeliminowania w praktyce błędu systematycznego. Zakładamy, że poprawne obliczenie wyniku i jego niepewności jest poprzedzone eliminacją tzw. błędów grubych (pomyłek) i korektą wpływu znanych źródeł błędów systematycznych na wynik pomiaru.
Z kolei miarą **rozproszenia wyników w serii pomiarowej** jest

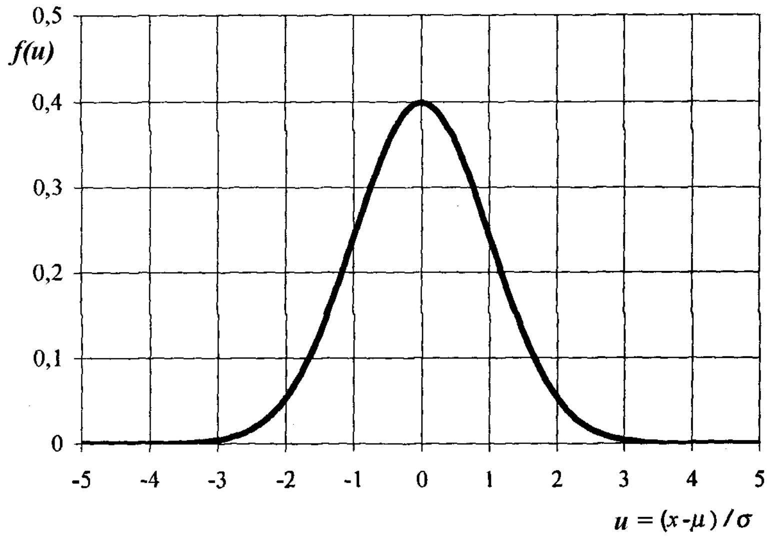
$$S(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma. \tag{4}$$

Występująca we wzorze (4) wielkość $S(x)$, zwana często średnią odchyłką kwadratową (od średniej), jest estymatorem (oszacowaniem) tzw. **odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru**, $\sigma$, a więc miary rozproszenia zmiennej losowej (mierzonej wielkości) wokół jej wartości oczekiwanej. Z powyższego wzoru wynika zasadność wielokrotnego powtarzania pomiaru – o ile średnia arytmetyczna każdej serii pomiarów stanowi „takie samo" oszacowanie wartości oczekiwanej, to związana z tym szacunkiem niepewność maleje ze wzrostem liczebności serii. W granicy – analogicznie jak w przypadku wzoru (2) – dla liczby pomiarów rosnącej nieograniczenie $S(x)$ staje się dokładnie odchyleniem standardowym.
Jeżeli wyniki pomiarów w serii $x_1, \ldots, x_n$ są otrzymywane w sposób (a) niezależny i (b) w warunkach zapewniających taką samą dokładność pomiaru, a także jeżeli liczba pomiarów ($n$) staje się znacząco duża (teoretycznie powinniśmy rozpatrywać przypadek $n$ zdążającego do nieskończoności; w praktyce wystarcza zwykle $n$ ok. $20 \div 30$) to zmienna losowa jaką jest wynik pomiaru $x$ podlega tzw. rozkładowi Gaussa (rozkładowi normalnemu) o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym $\sigma$. Rozkład ten określa **funkcja gęstości prawdopodobieństwa**, $f(x)$, dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{5}$$

Funkcja $f(x)$ określa prawdopodobieństwo $\mathcal{P}$ przyjęcia przez zmienną losową $X$ wartości z określonego przedziału zmiennej $(x, x+dx)$; konkretnie

$$\mathcal{P}\left[X \in (x, x+dx)\right] = f(x)dx. \tag{6}$$




Rysunek 0-1: Rozkład normalny (Gaussa). Wykres gęstości prawdopodobieństwa $f(u)$ zestandaryzowanej zmiennej $u = (x-\mu)/\sigma$, gdzie $x$ oznacza wynik pomiaru, $\mu$ – wartość oczekiwaną, a $\sigma$ – odchylenie standardowe rozkładu.

Na rys.0-1 przedstawiona jest funkcja Gaussa dla tzw. zestandaryzowanej zmiennej losowej

$$U \equiv \frac{X - \mu}{\sigma}. \tag{7}$$

Jest to zmienna, której „naturalnym" zerem jest jej wartość oczekiwana, a „naturalną" jednostką – jej odchylenie standardowe. Rozkład Gaussa – funkcja $f(x)$ – ma kształt dzwonowy, przy czym szerokość rozkładu jest proporcjonalna do odchylenia standardowego $\sigma$. Wartość oczekiwana $\mu$ jest, dla tego rozkładu, również wartością najbardziej prawdopodobną.
Całka tej funkcji liczona od $x_1$ do $x_2$ określa prawdopodobieństwo uzyskania wyników pomiaru w przedziale $(x_1, x_2)$. I tak, prawdopodobieństwo uzyskania wyników:

| | | |
|---|---|---|
| w przedziale | $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ | wynosi ok. 68,3%, |
| w przedziale | $((\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ | wynosi ok. 95,5%, |
| w przedziale | $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ | wynosi ok. 99,7%. |

*Przykład 2 (patrz Tabela 2).*
Zmierzono śrubą mikrometryczną średnicę drutu miedzianego. Oceniono, że z uwagi na jakość powierzchni, możliwe błędy przy wytwarzaniu drutu oraz stopień jego zużycia, niezbędne jest wykonanie pomiarów w różnych miejscach. Wykonano 10 pomiarów średnicy $d$ i uzyskano kolejno wyniki (w mm): 2,46; 2.49; 2.52; 2,47; 2,50; 2,51; 2,48; 2,49; 2,45; 2,50. Jaka jest średnica tego drutu (wartość najlepiej ją charakteryzująca) i z jaką niepewnością została określona?

$$\bar{d} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} d_i = 0,02214\,\text{mm}; \qquad S(d) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(d_i - \bar{d})^2}{(10-1)}} = 0,02214 \approx 0,022\,\text{mm}.$$

$S(d)$ jest estymatorem odchylenia standardowego $\sigma$ (wzór 4), charakteryzującym rozrzut wyników wokół wartości średniej. Niepewność standardowa obliczona metodą typu A ($u_A(d)$) wynosi

$$u_A(\bar{d}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = \frac{S(d)}{\sqrt{n}} = \frac{0,02214}{\sqrt{10}} \approx 0,007\,\text{mm}.$$

Czy jednak poprawnie zanalizowaliśmy dostępne dane? Rzut oka na serię wyników pozwala zauważyć, że poszczególne wartości różnią się znacząco między sobą i różnice te sięgają 0,05 mm, a więc pięciu działek użytej w pomiarze śruby mikrometrycznej. Świadczy to o odstępstwie „modelu pomiarowego" naszego drutu (jednorodny cylinder, o stałej – wzdłuż całej długości – średnicy) od sytuacji rzeczywistej, a obliczona niepewność pomiarowa $u_A(d)$ jest miarą rozproszenia wyników, wynikającego (głównie) z tego właśnie odstępstwa. Rozproszenie wyników może jednak wynikać także ze skończonej dokładności narzędzia, a w tej sytuacji jego miarą będzie ocena niepewności standardowej typu B

$$u_B(d) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \approx 0,006\,\text{mm}.$$

Obie niepewności są tego samego rzędu; w takiej sytuacji można zastosować wzór na tzw. **całkowitą (złożoną) niepewność**

$$u_C(d) = \sqrt{[u_A(d)]^2 + [u_B(d)]^2}, \qquad \text{albo:} \tag{8}$$

$$u_C(d) = (0,007^2 + 0,006^2)^{1/2}\text{mm} = 0,0085\,\text{mm} \approx 0,01\text{mm}.$$

Ostatecznie wynik pomiaru średnicy drutu możemy zapisać w postaci: $d = 2,49(0,01)\,\text{mm}$.
Gdyby w analogicznym pomiarze wyniki serii pomiarów były zawarte w przedziale $\pm 0,01\,\text{mm}$, to — jak łatwo sprawdzić — wartość $u_A$ byłaby o rząd wielkości mniejsza od wartości $u_B$. W

tej sytuacji przyczynek od „odstępstwa od modelu" jest do zaniedbania w stosunku do przyczynku „narzędziowego". Analogicznie, możemy mieć do czynienia z sytuacją kiedy przyczynek „narzędziowy" będzie zaniedbywalny w stosunku do przyczynku „modelowego".
Decyzja o tym, czy dla danej serii pomiarowej stosować ocenę typu A, B czy C może być w wielu przypadkach praktycznych trudna i zależeć od subiektywnej oceny sytuacji przez eksperymentatora (kierującego się zwykle pewnym doświadczeniem praktycznym). O ile – co jest zupełnie zrozumiałe – nie masz w tym przypadku własnego zdania, należy zapytać o radę prowadzącego ćwiczenia.

*Przykład 3.*
Planujemy wykonanie pomiaru znaną metodą i przyrządem. Z opisu wynika, że odchylenie standardowe tej metody i przyrządu wynosi dla jednego pomiaru $\sigma = 3$ (jednostki pominięto). Ile razy należy powtórzyć pomiar by niepewność standardowa wyniku była mniejsza niż 1? Przyjąć, że niepewność standardowa typu B, $u_B$, związana z dokładnością przyrządu jest pomijalnie mała. Szukaną liczbę powtórzeń $n$ pomiaru znajdujemy z relacji:

$$\frac{\sigma}{u} = \frac{S(x)}{S(\bar{x})} = \sqrt{n}; \qquad \text{stąd} \qquad n = (3/1)^2 = 9.$$

Odpowiedź: pomiar należy powtórzyć co najmniej 9 razy.

**Obliczanie niepewności złożonej w pomiarach pośrednich**

W przypadku, gdy mierzymy kilka wielkości fizycznych, np. $x, y, z, \ldots$ i na ich podstawie obliczamy wielkość fizyczną $t$, będącą funkcją wielkości mierzonych, niepewność obliczenia wielkości $t$ wyznaczamy ze wzoru

$$u_c(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 [u(x)]^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 [u(y)]^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 [u(z)]^2 + \ldots}. \tag{9}$$

Wzór ten można stosować przy założeniu, że wielkości mierzone: $x, y, z, \ldots$ są wielkościami statystycznie niezależnymi, a także że niepewności względne $u(x)/x, u(y)/y, u(z)/z, \ldots$ są małe (rzędu kilku procent lub mniejsze). Wzór ten wyraża znane w literaturze prawo przenoszenia odchyłek przypadkowych.

*Przykład 4.*
Wykonano pomiar grubości pozornej płytki szklanej przez odczyty położeń, $x_1 = 4,68\,\mathrm{mm}$ i $x_2 = 2,16\,\mathrm{mm}$, dolnej i górnej powierzchni płytki obserwowanej przy użyciu mikroskopu. Do odczytu położenia użyto czujnika mikrometrycznego. Ile wynosi grubość pozorna tej płytki?
Grubość pozorna płytki: $a = x_1 – x_2 = 2,52\,\mathrm{mm}$.
Dla czujnika mikrometrycznego działka elementarna wynosi 0,01 mm, a zatem

$$u(x_1) = u(x_2) = u = 0,01\,\mathrm{mm}/1,73 = 0,0058\mathrm{mm}.$$

Z prawa przenoszenia niepewności

$$u_c(a) = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}\right)^2 u^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial x_2}\right)^2 u^2} = \sqrt{u^2 + u^2} = \sqrt{2}u = 0,0082 \approx 0,01\,\mathrm{mm}.$$

Tak więc grubość pozorna płytki szklanej wyznaczona powyższą metodą wynosi $2,42(0,01)\,\mathrm{mm}$.

*Przykład 5.*
Pomiar czasu trwania 15 oddechów człowieka w spoczynku dał wynik $t = 58\,\mathrm{s}$. Niepewność $u(t)$ oszacowano na 1 s. Ile wynosi przeciętny czas trwania $T$ jednego oddechu?

$$T = t/15, \qquad \text{a zatem} \qquad u(T) = u(t)/15 \approx 0,067\,\mathrm{s}.$$

Ostatecznie $T = 3,867\,\mathrm{s}$ z niepewnością $0,067\,\mathrm{s}$.

*Przykład 6.*
Zmierzony stoperem czas trwania 20 wahnięć wahadła wynosił $t = 25,32\,\mathrm{s}$. Ile wynosił okres $T$ badanego wahadła ?
Przyjmujemy za niepewność pomiaru czasu wartość tzw. czasu reakcji człowieka, szacowaną na 0,2 s. W porównaniu z nim niepewność związana z dokładnością stopera elektronicznego, rzędu 0,01 s, jest pomijalnie mała.
Zatem

$$T = (25,32\,\mathrm{s})/20 = 1,266\,\mathrm{s} \approx 1,27\,\mathrm{s}.$$

$$u(T) = u(t)/20 = 0,2\,\mathrm{s}/20 = 0,01\,\mathrm{s}.$$

# 3 ZADANIA POMIAROWE

**I. Pomiar jednokrotny**
Zmierz jednokrotnie wielkości 3 trzech wybranych przez siebie przedmiotów, np.:

- szerokość kartki papieru z zeszytu, długość ołówka, wysokość szpalty w gazecie, odległość dwóch kropek na kartce, długość jaja kurzego – dłuższej osi tej w przybliżeniu elipsoidy obrotowej (rys.0-2), odległość 20 własnych kroków (wykorzystując, na przykład, informację o długości płyty chodnikowej), itp.
- jeden kąt w szkolnej ekierce,
- czas opadania piórka z wysokości 1 m, czas trwania 10 oddechów (w stanie spoczynku),
- wagę torebki cukru, mąki, soli, kostki masła, butelki soku itp.,
- średnicę rury przy pomocy kawałka sznurka i przymiaru liniowego,
- wymyśl sam interesującą Ciebie wielkość fizyczną, którą jesteś w stanie zmierzyć:

..........................................................................................

1. Dobierz dostępny i Twoim zdaniem właściwy przyrząd pomiarowy: liniał, taśmę mierniczą, suwmiarkę, śrubę mikrometryczną, wagę kuchenną, wagę laboratoryjną, zegar, stoper, itd.
2. Wykonaj jednokrotnie pomiary odpowiednich wielkości wybranych obiektów nr 1, nr 2, nr 3 i wyniki pomiaru wpisz w tabelę 1.
3. Określ niepewność standardową $u_B$ każdego pomiaru w oparciu o jakość użytego przyrządu pomiarowego (wzór1).
4. Przeanalizuj, czy w Twoim pomiarze nie występowały inne przyczyny niepewności wyniku, spróbuj je opisać.

**Tabela 1. Wyniki pomiarów jednokrotnych dla trzech różnych przedmiotów.**

| Nr | Przedmiot mierzony | Przyrząd pomiarowy, jakość przyrządu | (Wynik $\pm\Delta$) jednostka | Niepewność standardowa $u_B$ (wzór 1) | Uwagi* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0* | Szerokość kartki (przykład) | Liniał; $\Delta = 1\,\mathrm{mm}$ | $(209 \pm 1)\,\mathrm{mm}$ | $0,6\,\mathrm{mm}$ | $u_B \approx 1\,\mathrm{mm}$ |
| 1* | | | | | |
| 2* | | | | | |
| 3* | | | | | |

*0) Znaczącym źródłem niepewności pomiaru jest ewentualne lekko skośne ustawienie liniału względem kartki. Na podstawie kilku prób szacuję niepewność $u_B$ na około 1 mm.

*1) ..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

*2) ..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

*3) ..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

## II. Pomiary wielokrotne ($n \geqslant 10$)

Wykonaj pomiar 10-ciokrotny i opracuj jego wynik:

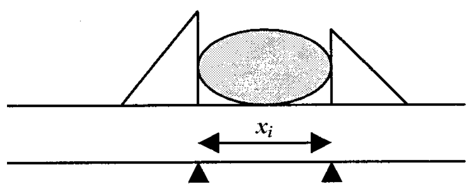
- wybierz 10 Twoim zdaniem prawie identycznych przedmiotów, np. 10 kurzych jaj, 10 jednakowych bułek, 10 jednakowych owoców, 10 zużytych kulek łożyskowych o średnicy rzędu 5-10 mm, itp., i wykonaj dziesięć pomiarów, każdy dla innego przedmiotu,
- albo wykonaj 10-krotnie pomiar „tego samego”, np. czasu 15 oddechów w spoczynku, czy szerokości pokoju w 10-ciu różnych miejscach, obwodu pnia drzewa w różnych miejscach, średnicy Księżyca przy pomocy monety i twierdzenia Talesa, itp.

1. Ustal co i czym będziesz mierzył, np.: jaja, oś długa tej niemal elipsoidy – suwmiarka lub papier milimetrowy i dwie ekierki (rys.0-2); kulki, ich średnica – śruba mikrometryczna; bułki, średnica podstawy – liniał z działką 1mm; czas trwania 15 oddechów – stoper, zegarek z sekundnikiem.
2. Wykonaj 10 razy pomiar wybranego (wybranych) obiektu (-ów) zachowując należytą staranność i wyniki wpisz odpowiednio do tabeli 2.

3. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$ [wzór(2)] i odchylenie standardowe średniej $S(\bar{x})$ [wzór(3)], to jest niepewność standardową $u_A$, i wyniki obliczeń wpisz do odpowiedniej kolumny Tabeli 2.

4. Zastanów się, czy w Twoim pomiarze niepewność typu B ($u_B$) związana z jakością przyrządu i warunkami pomiaru nie jest znacząca i postaraj się ją oszacować.

5. Zapisz końcowy wynik pomiaru to jest $\bar{x}$ oraz jego niepewność standardową, wybraną na podstawie analizy wielkości $u_A$ i $u_B$ oraz charakteru pomiaru. (będzie to jedna z tych dwóch niepewności, albo też niepewność złożona $u_C$). Dodaj komentarz, w którym uzasadniasz swój wybór.




Rysunek 0-2: Pomiar długości jaja (propozycja).

**Tabela 2. Wyniki pomiarów wielokrotnych.**

Wykonaj zadania nr ........................................................................ /podpis

| | Przykład II.1 | Zadanie II.1 | Przykład II.2 | Zadanie II.2 | Przykład II.3 | | Zadanie II.3 | | Zadanie II.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Średnica drutu x | | Czas 15 oddechów | Czas 15 oddechów | Czas reakcji własnej | | Czas reakcji własnej | | .......<br>....... |
| Nr | $x_i$ | $x_i$ | $t_i$ | $t_i$ | $x_i$ | $t_i^{**}$ | $x_i$ | $t_i$ | |
| | [mm] | | [s] | [s] | [mm] | [s] | | | |
| 1 | 2,46 | | 58 | | 220 | 0,2118 | | | |
| 2 | 2,49 | | 62 | | 190 | 0,1968 | | | |
| 3 | 2,52 | | 65 | | 230 | 0,2165 | | | |
| 4 | 2,47 | | 63 | | 200 | 0,2019 | | | |
| 5 | 2,50 | | 57 | | 230 | 0,2165 | | | |
| 6 | 2,51 | | 60 | | 240 | 0,2212 | | | |
| 7 | 2,48 | | 59 | | 220 | 0,2118 | | | |
| 8 | 2,49 | | 64 | | 190 | 0,1968 | | | |
| 9 | 2,45 | | 60 | | 230 | 0,2165 | | | |
| 10 | 2,50 | | 57 | | 240 | 0,2212 | | | |
| $\bar{x}$ | 2,487 | | 60,5 | | 219 | 0,2111 | | | |
| $S(x)$ | 0,022 | | 2,89 | | 19,1 | 0,094 | | | |
| $u_A$ | 0,007 | | 0,91 | | 6,1 | 0,0029 | | | |
| $u_B$ | 0,006 | | $1^{*)}$ | | $5^{***)}$ | – | | | |
| $u_C$ | 0,0092<br>$\approx 0,01$ | | 1,4 | | 7,9 | – | | | |
| $\bar{x}$<br>$u_A$ | 2,487<br>0,007 | | 60,5<br>0,9 | | 219<br>6,1 | 0,211<br>$0,003^{+}$ | | | |
| $\bar{x}$<br>$u_C$ | 2,49<br>0,001 | | 60,5<br>1,4 | | 219<br>7,9 | 0,211<br>$0,004^{++}$ | | | |

x) patrz Przykład 2 na stronie 0-6,

*) $u_B \approx 1\,\mathrm{s}$ oszacowano z niepewności ustalenia momentów start-stop na zegarku (porównaj z przykładami dotyczącymi prawa przenoszenia niepewności)

**) $t_i$ obliczamy z zależności: $t_i = (2x_i/g)^{1/2}$; $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$

***) $u_B = 5$ mm oszacowano z niepewności odczytu każdego wyniku

+,++ – patrz komentarz w obliczeniach do przykładu II.2 na str.0-14.

**Tabela 2A. Wyniki pomiarów wielokrotnych – ciąg dalszy.**

| | Przykład II.4<br>Objętość ($V$) jaj kurzych<br>$x$–oś długa, $y, z$ – osie krótkie;<br>$y \perp z$ | | | | Zadanie II.5<br>................................ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $V_i^{*)}$ | | | | |
| | [mm] | [mm] | [mm] | [cm$^3$] | | | | |
| 1 | 55 | 41 | 42 | 49,57 | | | | |
| 2 | 57 | 42 | 43 | 53,87 | | | | |
| 3 | 52 | 40 | 42 | 45,72 | | | | |
| 4 | 54 | 41 | 43 | 49,82 | | | | |
| 5 | 55 | 44 | 44 | 55,72 | | | | |
| 6 | 53 | 43 | 41 | 48,90 | | | | |
| 7 | 52 | 41 | 43 | 47,98 | | | | |
| 8 | 55 | 42 | 43 | 51,98 | | | | |
| 9 | 57 | 42 | 42 | 52,62 | | | | |
| 10 | 58 | 43 | 43 | 56,12 | | | | |
| $\bar{V}$ | – | – | – | 51,23 | | | | |
| $(V)$ | – | – | – | 3,41 | | | | |
| $u_A(V)$ | – | – | – | 1,1 | | | | |
| $u_B(V)$ | – | – | – | - | | | | |
| $u_C(V)$ | – | – | – | | | | | |
| $\bar{V}$<br>$u(V)$ | | | | 51,2<br>1,1 | | | | |

$^{*)}$ – Objętość elipsoidy $V_i = 1/8 \cdot 4/3\pi x_i y_i z_i = 1/6\pi x_i y_i z_i$.

*Uwaga:* mierzone $x_i, y_i, z_i$ są w znacznym stopniu zależne; dlatego nie korzystamy z prawa przenoszenia niepewności zmiennych pośrednich (9), a niepewność $u(V)$ obliczamy wprost z relacji (3), to jest z rozrzutu wartości $V_i$. Miara rozrzutu objętości to $S(V) \approx 3,4\,\mathrm{cm}^3$, estymator odchylenia standardowego $\sigma$ rozkładu Gaussa, któremu zapewne podlegają wymiary dużej populacji jaj tej klasy. W przedziale $(\bar{V} \pm S(V))$, tj. w przedziale $(47,8 \div 54,6)\,\mathrm{cm}^3$ mieści się 7 jaj na 10 (co odpowiada wartości 68% oczekiwanej z rozkładu Gaussa).